REPASO DE RADICALES

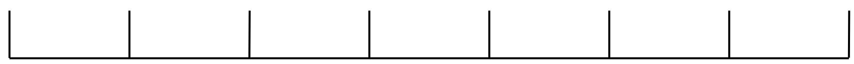
1º.- Introducción. Números Reales.

Hemos ido conociendo los diferentes tipos de números, empezando por los números naturales ( ), que son los primeros que surgen de manera natural, de ahí su nombre, para contar las cosas. Podemos imaginar al hombre prehistórico utilizando los números naturales, a su manera, para contar cuantos hijos tenía, cuanta fruta había recolectado, cuanta caza, etc,… Existen estudios que demuestran que hay pájaros capaces de contar hasta cinco, y así saber cuantas crías tienen y cuanta comida tienen que llevar a los nidos.

Los números naturales son, por tanto el 0, 1, 2, 3,…. Hay infinitos naturales, es decir, podemos encontrar un natural tan grande como queramos.
Los números naturales se pueden representar en una recta, pero no completan la recta, quedando huecos que no son números naturales:

Después conocimos los números enteros ( ), que añadían a los naturales, los negativos, es decir, los opuestos de los naturales. Son el resultado de restar a un natural, otro natural mayor que él. Si queremos restar al natural 5 el natural 25, ¿El resultado será otro natural?
La respuesta es que no, solo podemos restar hasta 5, los que tenemos, para que el resultado sea natural, si restamos más, entramos en otro conjunto de números, el de los enteros, obteniendo -20 como resultado.

Los enteros son por tanto los números …., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, … Que también se pueden representar en la recta, pero sin conseguir completar la recta:

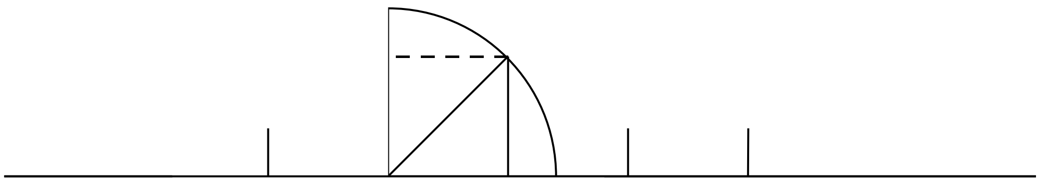


¿Qué ocurre si en lugar de querer considerar unidades enteras, consideramos porciones de esas unidades? Es decir, si queremos dividir, por ejemplo, 5 unidades en dos partes. Resulta que obtenemos dos unidades, pero nos sobra una unidad, como queremos partirlo en dos partes, tenemos que salirnos del conjunto de los enteros, entramos en un nuevo conjunto de números, los Racionales ( ). Que añaden a los enteros, todas las posibles divisiones que podamos hacer en partes iguales de cada una de las unidades enteras. Dicho de otro modo, los racionales son aquellos números que se pueden expresar en forma de fracción (una fracción representa una partición de unidades enteras, el numerador, en un número de partes iguales, el denominador). Así pues los racionales son los números $\frac{a}{b}$, $a \in \quad , b \in \quad$. Es decir las fracciones con numerador y denominador enteros. Estos números también se representan en la recta, pero siguen quedando huecos en ella. Así, hay números que se pueden representar en la recta que no son racionales.

Observación: Los números racionales, pueden expresarse de manera exacta o periódica con números decimales.

Ejemplo: $\frac{4}{5} = 0'8$; $\frac{1}{3} = 0'3$; $\frac{13}{18} = 0'72$.

Pero, ¿qué pasa con los huecos? Los huecos que quedan en la recta son aquellos números que no pueden expresarse de manera exacta o periódica con números decimales. Por ejemplo, ¿has probado a calcular la raíz cuadrada de 2? Si hacemos esta raíz cuadrada, que no es exacta, podemos pasarnos la vida entera calculando más y más decimales, que no encontraremos nunca una pauta, un periodo que se repita en su expresión decimal como ocurre con los dos ejemplos anteriores ($0'3 \quad y \quad 0'72$). Así, pues, según lo dicho anteriormente, este número, el resultado de hacer la raíz cuadrada de 2, no es un número racional, no lo podemos expresar como resultado de una división, no es una fracción con numerador y denominador enteros, y, sin embargo, si se puede representar en la recta:



De esta manera, introducimos los números Irracionales, que son aquellos que no son racionales, es decir, aquellos que no se pueden expresar como fracción con numerador y denominador enteros, pero que si se pueden representar en la recta. Como hemos visto, los números Irracionales no tienen expresión decimal exacta ni periódica. Es decir, siempre que se expresen con números decimales, se estará dando una aproximación.

La unión de los Iracionales y los Racionales se llama conjunto de los números Reales, que son todos los números que se pueden expresar como puntos de la recta. Así, queda completada la recta, y cualquier punto de ella es un número Real. Pudiéndo ser éste Racional o Irracional.

2º.-Radicales. ¿Qué son los radicales?

En el conjunto de los números Racionales, se ha definido una operación, la potencia. Paso a paso:

a) En primer lugar se definió la potencia con exponente natural distinto de cero. a^n, donde n era un número natural distinto de cero. Esta definición era muy sencilla, pues consistía en reiterar la multiplicación 'a' por 'a' por 'a', tantas veces como indica el número natural n.
Así, por ejemplo, 13^4 consiste en multiplicar 13·13·13·13 siendo el resultado el número28561.

b) En segundo lugar, definimos la potencia con exponente entero (positivo, cero o negativo). a^0 se definía siempre como 1, fuera cual fuera la base a. y en el caso a^{-n}, se definía como la fracción inversa de la potencia con exponente positivo. Es decir: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; o, más general $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$.

c) Por último llegamos a definir la potencia con exponente un número racional, es decir, con exponente una fracción con numerador y denominador enteros. Para ello, en primer lugar introducimos el concepto de radical.

Definición de Radical:
Se llama radical de índice el número positivo n y radicando el número A, al Número Real que al elevarlo a la potencia positiva n, da como resultado el número real A.

Ejemplo:·El radical de índice 3 y radicando 30 será el número real (K) que al elevarlo al índice (3) da como resultado el número 30. Es decir K tiene que ser tal que al multiplicarlo por sí mismo 3 veces obtengamos el número 30.(K^3=30)

Así pues, lo primero que tenemos que observar es que un radical es siempre un número real. No es una cosa rara, ***es un número.*** Y como tal, podremos operar con el, sumarlos, restarlo, multiplicarlo, dividirlo por otros números.

Un radical se expresa de la forma siguiente:

$\sqrt[n]{A}$, donde n es el índice, y A es el radicando.

Observación: De la propia definición observamos que si elevamos un radical al índice, el resultado será el radicando: $\left(\sqrt[n]{A}\right)^n = A$.

Podemos ya dar la definición de potencia con exponente una fracción.
Una potencia con exponente una fracción de numerador entero m y denominador n, consiste en el radical de índice el denominador n, y radicando la potencia con exponente el numerador m:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Esta definición es la clave para operar con radicales.

Observación:

- Un Radical es un número real por tanto o es Racional o es Irracional.
- Sea un radical, $\sqrt[n]{a^m}$, donde el radicando es una potencia; $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$**; En caso** de que $\frac{m}{n}$ sea entero, el número real $\sqrt[n]{a^m}$ **será racional y en caso de que** $\frac{m}{n}$ no sea entero, el número real $\sqrt[n]{a^m}$ será **Irracional.**
- Cuando un radical es Irracional, no se calcula la expresión decimal (ya que no será exacta sino aproximada). Se deja en forma de radical.

Ejemplos:

$\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2^6} = 2^{\frac{6}{3}}$, como $\frac{6}{3}$ es entero, es igual a 2, entonces el radical $\sqrt[3]{64}$ es racional. En concreto es igual a $2^2 = 4$.

$\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{2^5} = 2^{\frac{5}{3}}$ como $\frac{5}{3}$ No es entero, entonces el radical $\sqrt[3]{32}$ es Irracional..

3.- Forma típica de un radical.

Como hemos dicho los radicales son números, pero su expresión es algo compleja, además un mismo número se puede expresar de varias formas como radical, veámoslo:

$$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = 2^{\frac{4}{3}} = 2^{\frac{8}{6}} = \sqrt[6]{2^8}$$

$$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = 2^{\frac{4}{3}} = 2^{1+\frac{1}{3}} = 2^1 \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2 \cdot \sqrt[3]{2^1} = 2 \cdot \sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = 2^{\frac{4}{3}} = 2^{1+\frac{1}{3}} = 2^1 \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2 \cdot 2^{\frac{3}{9}} = 2 \cdot \sqrt[9]{2^3}$$

Hemos obtenido cuatro expresiones distintas $\sqrt[3]{16}$, $\sqrt[6]{2^8}$, $2 \cdot \sqrt[3]{2}$ y $2 \cdot \sqrt[9]{2^3}$ del mismo número real utilizando las propiedades de las potencias y de las fracciones.
Esto puede ser un lío, si cada uno le gusta expresar los radicales de una manera, sería imposible ponernos de acuerdo para operar con estos números tan complicados. Así que vamos a definir una forma única de representar todos los radicales, de manera que

siempre que un radical no esté de esa forma, seamos capaces de ponerlo de esa forma. Se llamará **forma típica.**

Definición: Decimos que la expresión de un número radical está en forma típica si el índice y el radicando son lo más pequeños posibles.

Pues bien, en esto va a consistir una parte muy importante de la teoría de radicales, en ser capaz de poner un radical en forma típica. Para ello, se siguen las siguientes pautas:

1º) Descomponer en factores el radicando.
2º) Reducir índice.
3º) Sacar factores fuera del radical.

NOTA IMPORTANTE: Una vez descompuesto en factores el radicando, no hay que operar nada con las bases de los factores, solo "jugamos" con el índice del radical y con los exponentes de los factores.

Ejercicios Resueltos (Hay que entenderlos, después intentarlos, después corregirlos, volverlos a entender, volverlos a hacer,… hasta que salgan casi sin pensar):

Ejercicio 1.
Pasar a forma típica los siguientes radicales:

a) $\sqrt[3]{459}$

1º) $459 = 3^3 \cdot 17 \rightarrow \sqrt[3]{459} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 17}$. A partir de ahora, con las bases (3 y 17) ya no se operará, únicamente hay que fijarse en el índice (3) y en los exponentes (3 y 1)

2º) NO se puede reducir índice, ya que el índice y los exponentes, 3, 3 y 1 tienen por M.C.D. 1. Es decir, no se pueden dividir a la vez más que por 1.

3º) Para sacar factores fuera comparamos los exponentes con el índice, si es mayor o igual se podrá sacar fuera el factor correspondiente(el 3), si es menor no se podrá sacar.

El 1er exponente, 3, es igual al índice,3. Es decir, se podrá sacar fuera. ¿cómo se saca? Dividiendo el exponente entre el índice. El cociente es el exponente que sale fuera y el resto es el exponente que queda dentro. FIJATE QUE HABLAMOS SIEMPRE DE EXPONENTE. CON LAS BASES NO OPERAMOS. Así, como 3:3 da 1 y el resto es cero, el exponente que sale es 1 y dentro no queda nada. Desaparece de dentro el factor.

El 2º Exponente, 1 es menor que el índice,3. Por tanto no sale el factor correspondiente (17). Así:

$\sqrt[3]{3^3 \cdot 17} = 3 \cdot \sqrt[3]{17}$

Rta: La forma típica de $\sqrt[3]{459}$ es $3\sqrt[3]{17}$

b) $\sqrt[3]{675}$

1º) $675 = 3^3 \cdot 5^3 \rightarrow \sqrt[3]{675} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 5^3}$.

2º) SI se puede reducir índice, ya que el índice y los exponentes, 3, 3 y 3tienen por M.C.D. 3. Es decir, se pueden dividir a la vez por 3. Así:

$\sqrt[3]{3^3 \cdot 5^3} = 3 \cdot 5 = 15$

3º ha desparecido el radical, por lo tanto, ya ha salido todo del radicando.

Rta: La forma típica de $\sqrt[3]{675}$ es 15

c) $\sqrt[4]{123456}$

1º) $\sqrt[4]{123456}=\sqrt[4]{2^6\cdot 3\cdot 643}$

2º) $\sqrt[4]{2^6\cdot 3\cdot 643}$ NO puede reducirse índice M.C.D.(4,6,1,1)=1

3º) 6:4=1 y de Resto 2→ $\sqrt[4]{2^6\cdot 3\cdot 643}=2^1\cdot\sqrt[4]{2^2\cdot 3\cdot 643}=2\sqrt[4]{2^2\cdot 3\cdot 643}$

Rta: La forma típica de $\sqrt[4]{123456}$ es $2\sqrt[4]{2^2\cdot 3\cdot 643}$

d) $12\sqrt[12]{32400}$

1º) $12\sqrt[12]{32400}=12\cdot\sqrt[12]{2^4\cdot 3^4\cdot 5^2}$

2º) $12\cdot\sqrt[12]{2^4\cdot 3^4\cdot 5^2}$ SI puede reducirse índice M.C.D.(12,4,4,2)=2:

$12\cdot\sqrt[12]{2^4\cdot 3^4\cdot 5^2}=12\cdot\sqrt[6]{2^2\cdot 3^2\cdot 5^1}$

3º) NO puede sacarse ningún factor fuera.

Rta: La forma típica de $12\sqrt[12]{32400}$ es $12\sqrt[6]{2^2\cdot 3^3\cdot 5}$

e) $3\sqrt[4]{648000}$

1º) $3\sqrt[4]{648000}=3\cdot\sqrt[4]{2^6\cdot 3^4\cdot 5^3}$

2º) $3\cdot\sqrt[4]{2^6\cdot 3^4\cdot 5^3}$ NO puede reducirse índice M.C.D.(4,6,4,3)=1:

3º) SI pueden sacarse factores fuera.

$3\cdot\sqrt[4]{2^6\cdot 3^4\cdot 5^3}=3\cdot 2\cdot 3\cdot\sqrt[4]{2^2\cdot 5^3}=18\cdot\sqrt[4]{2^2\cdot 5^3}$

Rta: La forma típica de $3\sqrt[4]{648000}$ es $18\sqrt[4]{2^2\cdot 5^3}$

f) $\sqrt[8]{3240000}$

1º) $\sqrt[4]{3240000}=\sqrt[4]{2^6\cdot 3^4\cdot 5^4}$

2º) $\sqrt[4]{2^6\cdot 3^4\cdot 5^4}$ SI puede reducirse índice M.C.D.(4,6,4,4)=2:

$\sqrt[4]{2^6\cdot 3^4\cdot 5^4}=\sqrt[2]{2^3\cdot 3^2\cdot 5^2}$

3º) SI pueden sacarse factores fuera.

$\sqrt[2]{2^3\cdot 3^2\cdot 5^2}=2\cdot 3\cdot 5\sqrt[2]{2^1}=30\sqrt{2}$

Rta: La forma típica de $\sqrt[4]{3240000}$ es $30\sqrt{2}$

g) $\sqrt[3]{686}$ Solución: $7\sqrt[3]{2}$

h) $5\sqrt[4]{96}$ Solución: $10\sqrt[4]{6}$

i) $2\sqrt{7623}$ Solución: $66\sqrt{7}$

j) $2\sqrt{3^4a^3c^2}$ (Si en lugar de factores primos, los factores son letras, pues hacemos lo mismo. Total, con las bases no se opera, así que es igual que sean números primos o que sean letras)

Solución: $18ac\sqrt{a}$

k) $\sqrt[3]{64x^4y^3z^2}$ Solución: $4xy\sqrt[3]{xz^2}$

l) $\sqrt[15]{32x^5y^5z^{15}}$ Solución: $z\sqrt[3]{2xy}$

m) $\sqrt[5]{320x^5y^5c^{10}}$ Solución: $2xyc^2\sqrt[5]{10}$

n) $\sqrt[3]{270(a+b)^5c^{10}}$ Alguno de los factores puede ser una suma, como en este caso, donde un factor es (a+b). Se hace lo mismo que si fuera un factor cualquiera, no se opera con él, solo se saca en caso que se pueda, del radical.

1º) $\sqrt[3]{270(a+b)^5c^{10}} = \sqrt[3]{2\cdot 5\cdot 3^3(a+b)^5c^{10}}$
2º) No se puede reducir. MCD(3,1,1,3,5,10)=1
3º) Se pueden sacar fuera los factores 3 (exponente 3 igual al índice), (a+b), que tiene exponente 5, mayor que el índice y el factor c, que tiene exponente 10, también mayor que el índice.
$\sqrt[3]{2\cdot 5\cdot 3^3(a+b)^5c^{10}} = 3\cdot(a+b)^1\cdot c^3\cdot\sqrt[3]{2\cdot 5\cdot(a+b)^2c^1}$

Solución: $3\cdot(a+b)\cdot c^3\cdot\sqrt[3]{10\cdot(a+b)^2c}$

ñ) $\sqrt[5]{8000(a+b)^6(1+a)^{12}c^3}$

Solución: $2\cdot(a+b)(1+a)^2\sqrt[5]{250(a+b)(1+a)^2c^3}$

4.-Operaciones con Radicales:

- ***Suma de Radicales.***
  - Si dos o más radicales son semejantes (es decir, si en forma típica tienen exactamente la misma parte radical) se podrán sumar, siendo el resultado un radical que tiene la misma parte radical y quedando fuera del radical la suma de las partes no radicales.
  - Si no son semejantes. No se pueden agrupar. Y por lo tanto, el resultado de la suma se queda indicado.

Ejemplos:

$3\sqrt[4]{5}+2\sqrt[4]{5}=(3+2)\sqrt[4]{5}=5\sqrt[4]{5}$ El resultado de la suma de esos dos números es el número $\boxed{5\sqrt[4]{5}}$

$3\sqrt[4]{5}+2\sqrt[4]{3}$ No se pueden agrupar, ya que no son radicales semejantes, por lo tanto, el resultado de sumar esos dos números hay que dejarlo indicado tal cual. La única forma de expresar ese número Irracional será $\boxed{3\sqrt[4]{5}+2\sqrt[4]{3}}$

Por tanto, para sumar radicales, lo primero será poner todos los radicales que aparecen en forma típica. Lo cual no es un problema si hemos realizado el ejercicio 1 tantas veces como haya sido necesario para hacerlo con soltura.
Ejercicios Resueltos (Hay que entenderlos, después intentarlos, después corregirlos, volverlos a entender, volverlos a hacer,… hasta que salgan casi sin pensar):

Ejercicio 2:

Realiza las siguientes sumas de radicales:

a) $2\sqrt{11}-7\sqrt{11}+5\sqrt{11}-3\sqrt{11}$

1º) Se pasan a forma típica los radicales. En este caso ya están en forma típica.

2º) Se agrupan aquellos que tienen idéntica parte radical:

$(2-7+5-3)\sqrt{11}=-3\sqrt{11}$

Rta: $-3\sqrt{11}$

b) $\sqrt{6}-2\sqrt{24}+3\sqrt{54}-5\sqrt{12}+\sqrt{27}$

1º) En forma típica:

$$\sqrt{6}-4\sqrt{6}+9\sqrt{6}-10\sqrt{3}+3\sqrt{3}$$

2º) Se agrupan los semejantes:

$$(1-4+9)\sqrt{6}+(-10+3)\sqrt{3}=6\sqrt{6}+(-7)\sqrt{3}=6\sqrt{6}-7\sqrt{3}$$

Rta: $6\sqrt{6}-7\sqrt{3}$

c) $-3\sqrt{45}-3\sqrt{125}+2\sqrt{500}-5\sqrt{20}$

Solución: $-14\sqrt{5}$

d) $\sqrt{4}+3\sqrt{27}+\sqrt[4]{16}-\sqrt[3]{8}$

Solución: $2+9\sqrt{3}$

e) $\dfrac{\sqrt[5]{3}}{4}+\sqrt[5]{96}-\dfrac{2}{3}\sqrt[5]{729}$

1º) $\dfrac{1}{4}\sqrt[5]{3}+2\sqrt[5]{3}-\dfrac{2\cdot 3}{3}\sqrt[5]{3}=\dfrac{1}{4}\sqrt[5]{3}+2\sqrt[5]{3}-2\sqrt[5]{3}$

2º) $\left(\dfrac{1}{4}+2-2\right)\sqrt[5]{3}=\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{8}{4}-\dfrac{8}{4}\right)\sqrt[5]{3}=\dfrac{1}{4}\sqrt[5]{3}$

Rta: $\dfrac{1}{4}\sqrt[5]{3}$

f) $\dfrac{\sqrt[5]{32a^4(a\cdot b)^3}}{5}+a\sqrt[5]{\dfrac{a^2b^4}{b}}-\dfrac{a}{9}\sqrt[5]{243a^2b^3}$

1º) $\dfrac{\sqrt[5]{32a^4(a\cdot b)^3}}{5}+a\sqrt[5]{\dfrac{a^2b^4}{b}}-\dfrac{a}{9}\sqrt[5]{243a^2b^3}=$

$$\frac{2a}{5}\sqrt[5]{a^2b^3}+a\sqrt[5]{a^2b^3}-\frac{a}{3}\sqrt[5]{a^2b^3}$$

2º) $\left(\dfrac{2a}{5}+a-\dfrac{a}{3}\right)\sqrt[5]{a^2b^3}=\dfrac{16a}{15}\sqrt[5]{a^2b^3}$ Rta: $\dfrac{16a}{15}\sqrt[5]{a^2b^3}$

g) $\dfrac{\sqrt{243}}{6}+2\sqrt[10]{243}+\sqrt[4]{9}-2\sqrt[6]{27}-\dfrac{3}{2}\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{75}}{5}$

Solución: $2\sqrt{3}$

h) $\sqrt{15}-2\sqrt{375}+3\sqrt{60}-5\sqrt{8}+\sqrt{72}$

Solución: $-3\sqrt{15}-4\sqrt{2}$

i) $6\sqrt{(a+b)^3}-\sqrt{(a+b)}+3\sqrt{9(a+b)}-5\sqrt{b^3}+\sqrt{36b}$

Solución: $(6a+6b+8)\sqrt{(a+b)}+(-5b+6)\sqrt{b}$

- ***Producto(y división) de Radicales.***
  - Si multiplicamos dos radicales que tienen idéntico índice. El resultado es otro radical con el mismo índice y con radicando el producto de los radicandos. (La división se realiza del mismo modo)
  - Si queremos multiplicar dos radicales que tienen distinto índice, hay que reducir a común índice en primer lugar, para luego multiplicar como se indica en el punto anterior.

  Nota: para reducir a común índice, en primer lugar calcularemos el m.c.m. de los índices y ese será el índice común. Los radicandos se calculan multiplicando los exponentes que haya en el radicando por el número que se obtiene al dividir el m.c.m entre el índice original de cada radical.

Ejemplos:

$\sqrt[5]{45}\cdot\sqrt[3]{2}$. Como son dos radicales con índices distintos(5 y 3), tenemos que reducir a común índice. El m.c.m (5,3)=15. por lo tanto el índice será 15. Vayamos radical por radical:

$\sqrt[5]{45}=\sqrt[5]{3^2\cdot 5}=\sqrt[15]{???}$; dividimos el m.c.m que es 15, entre el índice original, que es 5, y obtenemos 3. Por tanto, hay que multiplicar los **EXPONENTES** (*recordamos que con las bases no operamos)* por 3. Así, el nuevo exponente del factor 3 será 6 (2·3) y el nuevo exponente del factor 5 será 3 (1·3) quedando:

$\sqrt[5]{3^2\cdot 5}=\sqrt[15]{3^6\cdot 5^3}$. Así, el primer radical lo expresaremos de esta forma.

$\sqrt[3]{2}=\sqrt[15]{???}$. Dividimos 15 entre 3, obteniendo 5. Por tanto, el nuevo exponente del factor 2 será 5 (1·5) quedando:

$\sqrt[3]{2}=\sqrt[15]{2^5}$. Expresando de esta forma el segundo radical.

De esta forma, el producto inicial se puede expresar así:

$\sqrt[5]{45}\cdot\sqrt[3]{2}=\sqrt[15]{3^6\cdot 5^3}\cdot\sqrt[15]{2^5}$

Ahora, al tener el mismo índice, si se puede multiplicar reuniendo todos los factores bajo el mismo radical:

$\sqrt[15]{3^6\cdot 5^3}\cdot\sqrt[15]{2^5}=\sqrt[15]{3^6\cdot 5^3\cdot 2^5}$

Así pues, el producto de estos dos radicales es el radical $\sqrt[15]{3^6\cdot 5^3\cdot 2^5}$.

Ejercicios Resueltos (Hay que entenderlos, después intentarlos, después corregirlos, volverlos a entender, volverlos a hacer,… hasta que salgan casi sin pensar):

Ejercicio 3:

Realiza las siguientes multiplicaciones y divisiones de radicales:

a) $2\sqrt{11}\cdot\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt{28}\cdot\sqrt[3]{121}\cdot\sqrt[4]{7^3}$

1º) Descomponemos en factores los radicandos:

$2\sqrt{11}\cdot\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt{28}\cdot\sqrt[3]{121}\cdot\sqrt[4]{7^3}=2\sqrt{11}\cdot\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt{2^2\cdot 7}\cdot\sqrt[3]{11^2}\cdot\sqrt[4]{7^3}$

2º) m.c.m.(2,3,2,3,4)=12→

$2\sqrt{11}\cdot\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt{2^2\cdot 7}\cdot\sqrt[3]{11^2}\cdot\sqrt[4]{7^3}=2\cdot\sqrt[12]{???}\cdot\sqrt[12]{???}\cdot\sqrt[12]{???}\cdot\sqrt[12]{???}\cdot\sqrt[12]{???}=$

Dividimos ahora 12:2=6; 12:3=4; 12:2=6; 12:3 = 4; 12:4=3. Estos números hay que multiplicarlos por los respectivos exponentes, quedando:

$2\cdot\sqrt[12]{11^6}\cdot\sqrt[12]{7^4}\cdot\sqrt[12]{2^{12}7^6}\cdot\sqrt[12]{11^8}\cdot\sqrt[12]{7^9}$

3º) Multiplicamos ahora todos los radicandos bajo un mismo radical de índice 12:

$2\cdot\sqrt[12]{11^6 7^4 2^{12} 7^6 11^8 7^9}=2\sqrt[12]{2^{12}11^{14}7^{19}}$

4º) Pasamos el resultado a forma típica:

$2\sqrt[12]{2^{12}11^{14}7^{19}}=2\cdot 2\cdot 11\cdot 7\sqrt[12]{11^2 7^7}=2^2\cdot 7\cdot 11\cdot\sqrt[12]{11^2 7^7}$

Rta: $2\sqrt{11}\cdot\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt{28}\cdot\sqrt[3]{121}\cdot\sqrt[4]{7^3}=2^2\cdot 7\cdot 11\cdot\sqrt[12]{11^2 7^7}$

b) $2\sqrt{14}\cdot\sqrt[5]{25}\cdot\sqrt{15}\cdot\sqrt[6]{84}$

1º) $2\sqrt{14}\cdot\sqrt[5]{25}\cdot\sqrt{15}\cdot\sqrt[6]{84}=2\sqrt{2\cdot 7}\cdot\sqrt[5]{5^2}\cdot\sqrt{3\cdot 5}\cdot\sqrt[6]{2^2\cdot 3\cdot 7}$

2º) m.c.m.(2,5,2,6)=30 →

$2\sqrt{2\cdot 7}\cdot\sqrt[5]{5^2}\cdot\sqrt{3\cdot 5}\cdot\sqrt[6]{2^2\cdot 3\cdot 7}=\sqrt[30]{2^{15}\cdot 7^{15}}\cdot\sqrt[30]{5^{12}}\cdot\sqrt[30]{3^{15}\cdot 5^{15}}\cdot\sqrt[30]{2^{10}3^5 7^5}$

3º) $\sqrt[30]{2^{15}\cdot 7^{15}}\cdot\sqrt[30]{5^{12}}\cdot\sqrt[30]{3^{15}\cdot 5^{15}}\cdot\sqrt[30]{2^{10}3^5 7^5}=\sqrt[30]{2^{15}7^{15}5^{12}3^{15}5^{15}2^{10}3^5 7^5}=$

$\sqrt[30]{2^{25}7^{20}5^{27}3^{20}}$

4º) Ya está en forma típica.

Rta: $2\sqrt{14}\cdot\sqrt[5]{25}\cdot\sqrt{15}\cdot\sqrt[6]{84}=\sqrt[30]{2^{25}7^{20}5^{27}3^{20}}$

c) $\dfrac{2\sqrt{14}\cdot\sqrt[6]{4}}{\sqrt[3]{2}}$

1º) $\dfrac{2\sqrt{14}\cdot\sqrt[6]{4}}{\sqrt[3]{2}}=\dfrac{2\sqrt{2\cdot 7}\sqrt[6]{2^2}}{\sqrt[3]{2}}$

2º)m.c.m.(2,6,3)=2→

$\dfrac{2\sqrt{2\cdot 7}\sqrt[6]{2^2}}{\sqrt[3]{2}}=\dfrac{2\sqrt[12]{2^6 7^6}\sqrt[12]{2^4}}{\sqrt[12]{2^4}}$

3º) $\dfrac{2\sqrt[12]{2^6 7^6}\sqrt[12]{2^4}}{\sqrt[12]{2^4}}=2\sqrt[12]{\dfrac{2^6\cdot 7^6\cdot 2^4}{2^4}}=2\sqrt[12]{2^6\cdot 7^6}$

4º) $2\sqrt[12]{2^6\cdot 7^6}=2\sqrt{2\cdot 7}=2\sqrt{14}$

Rta: $\dfrac{2\sqrt{14}\cdot\sqrt[6]{4}}{\sqrt[3]{2}}=2\sqrt{14}$

d) $3\sqrt{15}\cdot 4\sqrt[3]{9}$ Solución: $36\cdot\sqrt[6]{3\cdot 5^3}$

e) $\sqrt{a \cdot b} \cdot \sqrt[7]{9b^6}$ Solución: $b \cdot \sqrt[6]{a^7 b^5 3^4}$

f) $a\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{a} \cdot a\sqrt[3]{2} \cdot 2\sqrt[3]{a} \cdot a\sqrt[6]{2} \cdot 2\sqrt[6]{a}$ Solución: $2^4\ a^4$

g) $\frac{4}{5}\sqrt{\frac{6m^3}{2n}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3n^3}{8m}} \cdot \frac{5}{6}\sqrt{\frac{2m^4n^3}{4m^3n}}$ Solución: $\frac{mn^2}{4}\sqrt{m}$

- ***<u>Potencia de Radicales.</u>***

La potencia de un radical, consiste en elevar el radicando a la potencia.

Ejemplo:

$$\left(\sqrt[7]{2 \cdot 5^4}\right)^6 = \sqrt[7]{\left(2 \cdot 5^4\right)^6} = \sqrt[7]{2^6 \cdot 5^{24}} = 5^3 \cdot \sqrt[7]{2^6 5^3}$$

- ***<u>Radicales de Radicales.</u>***

  - El radical de un radical, es otro radical que tiene por índice el producto de los índices y por radicando el radicando.
  - Para multiplicar los índices es necesario que todos los factores estén dentro de todos los radicales.

Ejemplo:

$\sqrt[3]{\sqrt{45}} = \sqrt[3]{\sqrt{3^2 5}}$ como todos los factores (el 3 y el 5) están dentro de todos los radicales, podemos multiplicar los índices quedando : $\sqrt[6]{3^2 5}$

$\sqrt[3]{7^2\sqrt{45}} = \sqrt[3]{7^2\sqrt{3^2 5}}$, aquí, el factor 7 no esta dentro de todos los radicales, solo esta dentro del primero, el de índice 3, por tanto, hay que introducirlo en el otro radical. Para ello, se multiplica su exponente (2) por el índice del radical en el que entra (también 2) obteniendo el exponente con el que entra en el radical (2·2=4): $\sqrt[3]{7^2\sqrt{3^2 5}} = \sqrt[3]{\sqrt{7^4 3^2 5}}$. Ahora si estamos en condiciones de multiplicar los índices: $\sqrt[6]{7^4 3^2 5}$

Ejercicios Resueltos (Hay que entenderlos, después intentarlos, después corregirlos, volverlos a entender, volverlos a hacer,… hasta que salgan casi sin pensar):

Ejercicio 4:

Realiza las siguientes operaciones de radicales:

a) $\left(\sqrt[3]{5^2}\right)^4$ Solución: $5^2 \cdot \sqrt[3]{5^2}$

b) $\left(\sqrt{3a^2}\right)^7$ Solución: $3^3 a^7 \cdot \sqrt{3}$

c) $\sqrt[2]{\left(\sqrt{3}\right)^3}$ Solución $\sqrt[4]{3^3}$

d) $\sqrt{2^3\sqrt[5]{\frac{1}{2}}}$ Solución $2\sqrt[5]{2^2}$

5.-Racionalizar Radicales:

Dada una fracción en la que haya radicales al menos en el denominador, Racionalizar consiste en expresar esa fracción con una equivalente en la que el denominador sea racional, es decir, no haya radicales en el denominador.

Emplearemos dos métodos para racionalizar, según el tipo de radical que haya en el denominador:

- **Si en el denominador tenemos un único radical**
  Hay que multiplicar el numerador y el denominador por otro radical donde el índice sea el mismo que el índice del radial que hay en el denominador y el radicando tenga los mismos factores, pero por exponentes lo que le falta a los exponentes para alcanzar al índice)
  Ejemplo: $\frac{3\cdot\sqrt[5]{3^2}}{2\cdot\sqrt[4]{8}}$
  Como el denominador hay un único radical ($2\cdot\sqrt[3]{4}$), es de este tipo.
  1º) Lo primero es factorizar los radicandos, como siempre, y pasar a forma típica si no lo están.
  $\frac{3\cdot\sqrt[5]{3^2}}{2\cdot\sqrt[4]{2^3}}$
  2º) Lo segundo es multiplicar el numerador y el denominador por el mismo radical, que tendrá por índice el índice del radical del denominador (el de abajo) que es 4: $\sqrt[4]{???}$ .En el radicando pondremos los mismos factores que hay en el radicando del denominador (en este caso hay un factor, el 2). $\sqrt[4]{2^{???}}$ Lo único que falta por decidir es el exponente del factor (del 2) como en el radicando teníamos por exponente un 3 (teníamos 2^3) y el índice es 4. Nos falta 1 (4-3) por lo tanto finalmente queda que tenemos que multiplicar por $\sqrt[4]{2^1}$. Así, queda:

  $$\frac{3\cdot\sqrt[5]{3^2}}{2\cdot\sqrt[4]{2^3}}\cdot\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2}}=\frac{3\cdot\sqrt[5]{3^2}\cdot\sqrt[4]{2}}{2\cdot\sqrt[4]{2^3}\cdot\sqrt[4]{2}}=\frac{3\cdot\sqrt[20]{3^8}\cdot\sqrt[20]{2^5}}{2\cdot\sqrt[4]{2^3\cdot 2}}=\frac{3\sqrt[20]{3^8\cdot 2^5}}{2\cdot\sqrt[4]{2^4}}=\frac{3\sqrt[20]{3^8\cdot 2^5}}{2\cdot 2}=\frac{3\sqrt[20]{3^8\cdot 2^5}}{4}$$

  Como observamos, ha desaparecido el radical del denominador, como buscábamos.
  Rta: $\frac{3\cdot\sqrt[5]{3^2}}{2\cdot\sqrt[4]{2^3}}=\frac{3\sqrt[20]{3^8\cdot 2^5}}{4}$
- **Si en el denominador tenemos una suma o resta de dos números donde uno o los dos son radicales de índice 2.**
  En este caso, es muy sencillo, simplemente hay que multiplicar por el conjugado de la suma o resta que aparece en el denominador.
  ¿Qué es el conjugado de una suma? Es una resta con los mismos sumandos.
  Ejemplo: Conjugado de 3+$\sqrt{2}$ es 3-$\sqrt{2}$.

¿qué es el conjugado de una resta? Es una suma con los mismos sumandos.

Ejemplo: Conjugado de $\sqrt{5}$ - $\sqrt{2}$ es $\sqrt{5}+\sqrt{2}$.

Ejemplo: Racionalizar $\dfrac{13\sqrt[3]{5^2}}{2\sqrt{5}-\sqrt{7}}$

Observamos que en el denominador **NO** hay un único radical, sino que hay una resta de dos radicales de índice 2. Por lo tanto es de los que hay que racionalizar multiplicando por el conjugado del denominador.

1º) ¿Quién es el conjugado del denominador?

Como el denominador es $2\sqrt{5}-\sqrt{7}$, el conjugado es $2\sqrt{5}+\sqrt{7}$.

2º) multiplicamos el numerador y el denominador por ese conjugado ($2\sqrt{5}+\sqrt{7}$):

$$\frac{13\sqrt[3]{5^2}}{2\sqrt{5}-\sqrt{7}}\cdot\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{7}}{2\sqrt{5}+\sqrt{7}}=\frac{13\sqrt[3]{5^2}\left(2\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)}{\left(2\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)\left(2\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)}.$$

Para realizar la multiplicación en el denominador, observamos que siempre será suma por diferencia, así que el resultado será la diferencia de los cuadrados:

$$\frac{13\sqrt[3]{5^2}\left(2\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)}{\left(2\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}=\frac{13\sqrt[3]{5^2}\left(2\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)}{2^2\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}=\frac{13\sqrt[3]{5^2}\left(2\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)}{4\sqrt{5^2}-\sqrt{7^2}}=\frac{13\sqrt[3]{5^2}\left(2\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)}{4{\cdot}5-7}$$

$$=\frac{13\sqrt[3]{5^2}\left(2\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)}{13}=\sqrt[3]{5^2}\left(2\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)=\sqrt[3]{5^2}\cdot 2\sqrt{5}+\sqrt[3]{5^2}{\cdot}\sqrt{7}=2{\cdot}\sqrt[6]{5^4{\cdot}5^3}+\sqrt[6]{5^4 7^3}=$$

$$2\sqrt[6]{5^7}+\sqrt[6]{5^4 7^3}=2{\cdot}5\sqrt[6]{5}+\sqrt[6]{5^4 7^3}=10\sqrt[6]{5}+\sqrt[6]{5^4 7^3}$$

Rta: $10\sqrt[6]{5}+\sqrt[6]{5^4 7^3}$

Ejercicios Resueltos (Hay que entenderlos, después intentarlos, después corregirlos, volverlos a entender, volverlos a hacer,… hasta que salgan casi sin pensar):

Ejercicio 5:

Racionaliza los siguientes números radicales:

a) $\dfrac{3\sqrt[3]{45}}{\sqrt[4]{3}}$

1º) $\dfrac{3\sqrt[3]{3^2 5}}{\sqrt[4]{3}}$

2º) $\dfrac{3\sqrt[3]{3^2 5}}{\sqrt[4]{3}}.\dfrac{\sqrt[4]{3^3}}{\sqrt[4]{3^3}}=\dfrac{3\sqrt[3]{3^2 5}\cdot\sqrt[4]{3^3}}{\sqrt[4]{3}{\cdot}\sqrt[4]{3^3}}=\dfrac{3\sqrt[12]{3^8 5^4}\cdot\sqrt[12]{3^9}}{\sqrt[4]{3{\cdot}3^3}}=$

$$\frac{3\sqrt[12]{3^8 5^4 3^9}}{\sqrt[4]{3^4}}=\frac{3\sqrt[12]{3^8 5^4 3^9}}{3}=\sqrt[12]{3^{17}5^4}=3{\cdot}\sqrt[12]{3^5 5^4}$$

Rta: $3\cdot\sqrt[12]{3^5 5^4}$

b) $\dfrac{12}{\sqrt[5]{2^3}}$ Solución: $6\sqrt[5]{2^2}$

c) $\dfrac{7\sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[4]{98}}$ Solución: $6\sqrt[5]{2^2}$

d) $\dfrac{3\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[4]{3^3 5}}$ Solución: $\sqrt[12]{3^3\cdot 5^5}$

e) $\dfrac{6}{\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$ Solución: $-\dfrac{6\sqrt{5}+18\sqrt{2}}{13}$

f) $\dfrac{6\sqrt[3]{3}}{3\sqrt{6}-3\sqrt{2}}$

1º) Lo primero que observamos es que en el denominador se puede sacar factor común el 3, quedando $3\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$ de esta forma podemos simplificar: $\dfrac{2\cdot 3\sqrt[3]{3}}{3\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}=\dfrac{2\sqrt[3]{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$

El conjugado del denominador es $\sqrt{6}+\sqrt{2}$

2º) $\dfrac{2\sqrt[3]{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt[3]{3}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{6}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=$

$$\frac{2\sqrt[3]{3}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{6^2}-\sqrt{2^2}}=\frac{2\sqrt[3]{3}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{6-2}=\frac{2\sqrt[3]{3}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{4}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{3}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{2}=\frac{\sqrt[3]{3}\sqrt{2\cdot 3}+\sqrt[3]{3}\sqrt{2}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt[6]{3^2}\sqrt[6]{2^3 3^3}+\sqrt[6]{3^2}\sqrt[6]{2^3}}{2}=\frac{\sqrt[6]{3^5 2^3}+\sqrt[6]{3^5}}{2}$$

Rta: $\dfrac{6\sqrt[3]{3}}{3\sqrt{6}-3\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt[6]{3^5 2^3}+\sqrt[6]{3^5}}{2}$

g) $\dfrac{5}{3\sqrt{20}+\sqrt{14}}$ Solución: $\dfrac{30\sqrt{5}-5\sqrt{14}}{166}$

h) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ Solución: $-5+2\sqrt{6}$

i) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{12}+4\sqrt{3}}$ Solución: $\dfrac{\sqrt{6}}{18}$

j) $\dfrac{12\sqrt[4]{5^3}}{\sqrt{7^3}-3}$ Solución: $\dfrac{42\sqrt[4]{5^3 7^2}-18\sqrt[4]{5^3}}{137}$